

衝撃検流計による電流積分特性と衝撃定数との 関連性について

森 岡 望*

Current Integral Characteristics and Ballistic Constant of Ballistic Galvanometer

by Nozomi Morioka*

Synopsis: The current integral characteristics are greatly affected by the constant of the circuit, on the measurement of charges in CR-discharge circuit.

Author discussed about the relation between the current integral characteristics and the ballistic constant for the circuit time constant T as parameter.

The results of the experiment and those of simulation were also discussed.

要旨 本論文は CR 放電回路の電荷測定において、回路の時定数 T をパラメータとしたときの電流積分特性と衝撃定数の関連性について実験とシミュレーションの結果を比較検討した。

1. ま え が き

衝撃検流計は可動部の慣性モーメントを大きくしその周期を20秒以上にした直流検流計で、コイルを通過した電流の積分値、すなわちコイルを通過した電荷に比例する振れを生じることから電荷の測定に用いられる。このとき測定条件は衝撃検流計の周期を T_n 、測定しようとする過渡電流の持続時間を t_0 とすれば $T_n \gg t_0$ なる条件を満たすべきだとされている^{1,2)}。

本論文では CR 放電回路において、回路の時定数 T をパラメータとして実測しさらにシミュレーションを行ない電流積分特性と衝撃定数との関連性について比較検討し、測定条件の吟味を行なった。

2. 衝撃定数の測定法

コンデンサの電荷測定の場合は標準コンデンサによる方法がある。これは静電容量 C_s [F] の標準コンデンサを電圧 E [V] で充電し、これを衝撃検流計を通して放電するとき、検流計が x_s [mm] だけ振れたとすれば、衝撃定数 K を次式で求められる²⁾。

$$K = \frac{C_s E}{x_s} [C/mm]$$

このとき回路の時定数を T とすれば $T_n \gg T$ なる測定条件を満足していなければならない。

3. 運動方程式の解析³⁾

CR 放電の電荷測定回路として図1に示すような回路を考えれば検流計に流れる電流 $i_{(t)}$ は超万能分流器の倍率 M を $M=1$ とすれば

$$i_{(t)} = \frac{CV}{T} e^{-t/T} \quad (3-1)$$

で表わされる。(3-1) 式の T は回路の時定数であり、検流計抵抗に対して直列抵抗 R を目的上大きくとることから

$$T \approx RC \quad (3-2)$$

なる近似値を採用する。いま (3-1) 式で示される入力電流に対して可動コイル形衝撃検流計の運動方程式は可動部の慣性モーメントを J 、制動定数を N 、制御定数を τ 、駆動定数を G 、スケール上の変位を $x_{(t)}$ とすれば

$$J \ddot{x}_{(t)} + N \dot{x}_{(t)} + \tau x_{(t)} = G \cdot i_{(t)} \quad (3-3)$$

で表わされる。(3-3) を変形し、初期条件を $x_{(0)} = C_1$, $\dot{x}_{(0)} = C_2$ とすれば

$$\ddot{x}_{(t)} + 2\alpha \dot{x}_{(t)} + \omega_d^2 x_{(t)} = \frac{G}{J} \cdot i_{(t)} \quad (3-4)$$

* 電気工学教室助手
Assistant, Electrical Engineering Division

$$x_{(0)} = C_1$$

$$\dot{x}_{(0)} = C_2$$

となる。ここで $\alpha = N/2J$, $\omega_n^2 = \tau/J$ である。

さらに $x_{1(t)} = x_{(t)}$, $x_{2(t)} = \dot{x}_{(t)}$ とおけば (3-4) 式は次式で示されるようなマトリクス表示の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1(t)} \\ \dot{x}_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \frac{2}{n} & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{G}{J} \cdot i_{(t)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

(3-5) 式をベクトルで表わせば

$$\dot{\mathbf{x}}_{(t)} = A\mathbf{x}_{(t)} + \mathbf{f} \quad (3-6)$$

$$(0, \mathbf{x}_{(0)})$$

ここに \mathbf{x} : 二次元ベクトル, A : 二次元正方形行列

(3-6) 式は H (: 固有ベクトルからなる定数行列) を用いて $\mathbf{x}_{(t)} = H\mathbf{y}_{(t)}$ とおけば対角化され

$$\dot{\mathbf{y}}_{(t)} = D\mathbf{y}_{(t)} + H^{-1}\mathbf{f}_{(t)} \quad (3-7)$$

$$(0, \mathbf{y}_{(0)} = H^{-1}\mathbf{x}_{(0)})$$

ここに $D = H^{-1}AH$: 対角行列

となる。(3-7) 式の解は

$$\mathbf{y}_{(t)} = e^{Dt}(\mathbf{y}_{(0)} + \int_0^t e^{-Ds} \cdot H^{-1}\mathbf{f}_{(s)} ds) \quad (3-8)$$

である。実験においては検流計の感度を良くするために不足制動 ($\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} < 1$) で測定を行なったのでここでも不足制動の場合について考えれば $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ の関係が成り立ち、マトリクス A の固有ベクトルからなる定数行列 H は

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha + j\omega_d & -\alpha - j\omega_d \end{bmatrix}$$

となる。また H^{-1} は

$$H^{-1} = \frac{1}{-j2\omega_d} \begin{bmatrix} -\alpha - j\omega_d & -1 \\ \alpha - j\omega_d & 1 \end{bmatrix}$$

であるから対角行列 D は $D = H^{-1}AH$ より

$$D = \begin{bmatrix} -\alpha + j\omega_d & 0 \\ 0 & -\alpha - j\omega_d \end{bmatrix}$$

である。(3-8) 式の e^{Dt} と e^{-Ds} はそれぞれ

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} & 0 \\ 0 & e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \end{bmatrix}$$

$$e^{-Ds} = \begin{bmatrix} e^{(\alpha - j\omega_d)s} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha + j\omega_d)s} \end{bmatrix}$$

となる⁴⁾。

さらに (3-8) 式の積分項を計算すると

$$\int_0^t e^{-Ds} H^{-1} \mathbf{f}_{(s)} ds$$

$$= -\frac{GCV}{J\omega_d T} \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} -\int_0^t e^{(\alpha-1/T-j\omega_d)s} ds \\ \int_0^t e^{(\alpha-1/T+j\omega_d)s} ds \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{GCV}{J\omega_d T} \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha - \frac{1}{T} - j\omega_d} \{e^{(\alpha-1/T-j\omega_d)t} - 1\} \\ \frac{1}{\alpha - \frac{1}{T} + j\omega_d} \{e^{(\alpha-1/T+j\omega_d)t} - 1\} \end{bmatrix}$$

よって (3-8) 式の第2項は

$$e^{Dt} \int_0^t e^{-Ds} H^{-1} \mathbf{f}_{(s)} ds = -\frac{GCV}{J\omega_d T} \frac{1}{2J} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha - \frac{1}{T} - j\omega_d} \{e^{-t/T} - e^{(-\alpha+j\omega_d)t}\} \\ \frac{1}{\alpha - \frac{1}{T} + j\omega_d} \{e^{-t/T} - e^{(-\alpha-j\omega_d)t}\} \end{bmatrix}$$

である。ここで初期条件を

$\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{0}$ とすれば $\mathbf{y}_{(0)} = \mathbf{0}$ であるから (3-8) 式に

$$\mathbf{y}_{(t)} = e^{Dt} \int_0^t e^{-Ds} H^{-1} \mathbf{f}_{(s)} ds$$

となり、 $\mathbf{x}_{(t)} = H\mathbf{y}_{(t)}$ より

$$\mathbf{x}_{(t)} = H \cdot e^{Dt} \int_0^t e^{-Ds} \cdot H^{-1} \cdot \mathbf{f}_{(s)} ds \quad (3-9)$$

の形に導かれる。(3-9) 式を解くと

$$\begin{bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(t)} \\ \dot{x}_{(t)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Pe^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{1}{T} - \alpha \right) \sin \omega_d t - \cos \omega_d t + e^{(\alpha-1/T)t} \right\} \\ Pe^{-\alpha t} \left\{ \left\{ \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \left(\frac{1}{T} - \alpha \right) \right\} \sin \omega_d t \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{T} \cos \omega_d t - \frac{1}{T} e^{(\alpha-1/T)t} \right\} \right\} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

$$\text{ここに } P = \frac{1}{\left(\alpha - \frac{1}{T}\right)^2 + \omega_d^2} \frac{GCV}{JT}$$

すなわち衝撃検流計が不足制動の状態では初期条件が $x_{(0)} = 0$, $\dot{x}_{(0)} = 0$ の場合に (3-1) 式で示される電流が流れた時振れ $x_{(t)}$ とその微分値 $\dot{x}_{(t)}$ は (3-10) 式のよに求まる。

(3-3) 式で明らかのように衝撃検流計の振れ $x_{(t)}$ は入力電流の積分値に比例する。このとき振れ $x_{(t)}$ が最大となる時間を t^* で表わせば (3-10) 式で $\dot{x}_{(t)} = 0$ を満す時間 t が t^* に等しいはずであるが (3-10) 式の $\dot{x}_{(t)}$ の式を見るとわかるように [] の中が零となる時間 $t = t^*$ は理論的に求めることができない。そこで放電回路の抵抗 R を変化させることによって時定数 T をパラメータとしたときの衝撃検流計の積分特性と衝撃定数との関係、さらに $T-t^*$ 特性について実験とシミュレーションによって検討を行なうことにする。

4. 実験とシミュレーション

4.1 実験

実験は図1の測定回路において、コンデンサは標準コンデンサ $C_s = 1.0002$ [μF] を用い充電方式は定電流源装置により 100 [mA] を標準抵抗 $R_s = 10$ [Ω] に流し充電電圧 1 [V] を得た。スイッチ S にて充放電回路の切り換えを行ない超万能分流器は GS-1 A 級で検流計の測定感度を高めるために制動抵抗として 20 [k Ω] を採用し不足制動の状態では測定を行なった。実験で使した衝撃検流計 (B. G) は直流可動コイル型反照検流計 (G-3D) でその定格は

電流感度 : 1.5×10^{-10} [A]

臨界制動抵抗 : 10000 [Ω]

線輪抵抗 : 800 [Ω]

周期 : 20 [sec]

である。放電回路の時定数を変化させるためにコンデンサと直列に 1 [k Ω] ~ 100 [M Ω] の抵抗 R を接続し、抵抗 R をパラメータとして測定を行ない、振れの最大値 x^* と放電回路の時定数 $T (= C_s R)$ との関係曲線を求める。

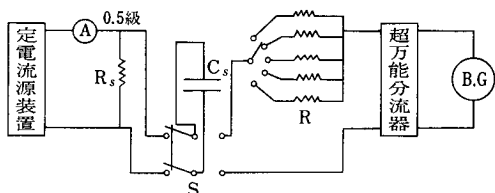


図1 測定回路

4.2 シミュレーション

4.2.1 パラメータ J , N , τ , G の推定⁵⁾

直流検流計の運動方程式 (3-3) 式において $G = \tau/A$ の関係を代入すれば方程式は

$$J\ddot{x}_{(t)} + N\dot{x}_{(t)} + \tau x_{(t)} = -\frac{\tau}{A} \cdot i_{(t)} \quad (4-1)$$

で表わされる。(4-1) 式中の J , N , τ , A を次に述べるような間接法によって推定する。

(1) 検流計の電流感度 A は他のパラメータと独立であり

$$I = \frac{E}{R + r_g} = A \cdot x_f$$

の関係が成り立ち R , r_g , E , x_f は測定できるので A は簡単に推定できる。

(2) J , N , τ は単独に求めることはできないがつぎのような測定 (I) (II) を行なうことによって順次求められる。

(I) 不足制動の状態において振れを 0 からだいたい x_1 振らせておいてその時の周期 T と振れを測定し対数減衰率 $\lambda = \ln(x_n/x_{n+1})$ を求める。

(II) 検流計回路を開路にして 0 からだいたい x_1 振らせ空気制動のみ作用するときの周期 T_a と対数減衰率 λ_a を求める。

以上の測定を行なうことによって τ/J は

$$T_a = \frac{T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}}$$

の関係式より

$$\frac{\tau}{J} = \omega_n^2 = \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 = a \quad (4-2)$$

として求まる。さらに N/J は $\lambda = NT/4J$ より

$$\frac{N}{J} = \frac{4\lambda}{T} = b \quad (4-3)$$

同様に空気制動のみの場合 N_a/J は

$$\frac{N_a}{J} = \frac{4\lambda_a}{T_a} = c \quad (4-4)$$

である。さらに検流計の臨界制動抵抗を R_c とし、臨界制動の値を N_c とすれば

$$N_c = N_a + (\tau^2/A^2 R_c)$$

であり N_c/J を考えれば

$$\frac{N_c}{J} = \frac{N_a}{J} + \frac{\tau}{J} \frac{\tau}{A^2 R_c} \quad (4-5)$$

となる。 N_c と ω_n との間には $2\omega_n = N_c/J$ なる関係式があり (4-5) 式に (4-2) 式と (4-4) 式の値を代入すれば制動定数 τ は

$$\tau = \left(\frac{2\sqrt{a-c}}{a} \right) A^2 R_c$$

として求まる。(4-2) 式より慣性モーメント J は

$$J = \frac{\tau}{a}$$

(4-4) 式より空気制動定数 N_a は

$$N_a = J \cdot c$$

となる。駆動定数 G は

$$G = \frac{\tau}{A}$$

で求められる。制動定数 N は使用する制動抵抗 r によって異なるから

$$N = N_a + \frac{G^2}{r}$$

で求めるとよい。以上のような手順で各パラメータを推定できる。

4.2.2 シミュレーションの方法

前節で述べたパラメータの推定法により実験に用いた衝撃検流計の各定数は表1のように求まった。なお表1の数値で*が付いているものは試験成績表による値である。シミュレーションを行なう項目としては理論式によって実験結果と直接に比較検討ができないので次のような項目について計算値を求める。

時定数 T をパラメータとしたときの

- (1) 検流計の振れが最大となる時間 t^* とその値 x^*
- (2) 積分特性を考えるために積分電荷量 q を

$$q = \int_0^{t^*} i_{cs} ds$$

で定義し、この時 i_{cs} は (3-1) 式と同じものである

表1 検流計の定数

定数	数値
慣性モーメント: J	123.77×10^{-16}
制動定数: N	34.01×10^{-16}
制動定数: τ	9.57×10^{-16}
駆動定数: G	7.97×10^{-6}
空気制動定数: N_a	3.40×10^{-10}
電流感度: A [A/mm]	$*1.24 \times 10^{-10}$
臨界制動抵抗: R_c [Ω]	$*9,100$
制動抵抗: r [Ω]	$*20,757$

から全電荷量に対する百分率 η を考え

$$\eta = (1 - e^{-t^*/T}) \times 100 [\%]$$

を算出する。

- (3) 衝撃定数 K と時定数 T との関係を知るために擬衝撃定数 K^* を次式のように定義し計算する。

$$K^* = \frac{\int_0^{t^*} i_{cs} ds}{x^*} = \frac{q}{x^*} [\text{c/mm}]$$

以上の項目について表1の定数を用い、(3-10) 式の x_{ci} をデジタル電子計算機 (HIPAC-101B) でシミュレーションを行なった。

5. 結果と考察

回路の時定数 T をパラメータとして x_{ci} の計算を行なった結果の一例を図2に示す。図2で振れ x_{ci} が最大となる値が x^* でありその時間が $t=t^*$ であるから同時

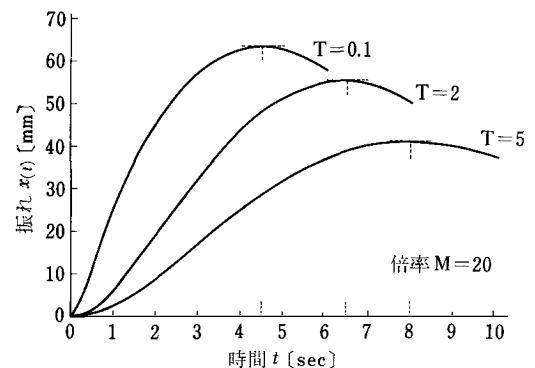


図2 $x(t)$ のシミュレーション例

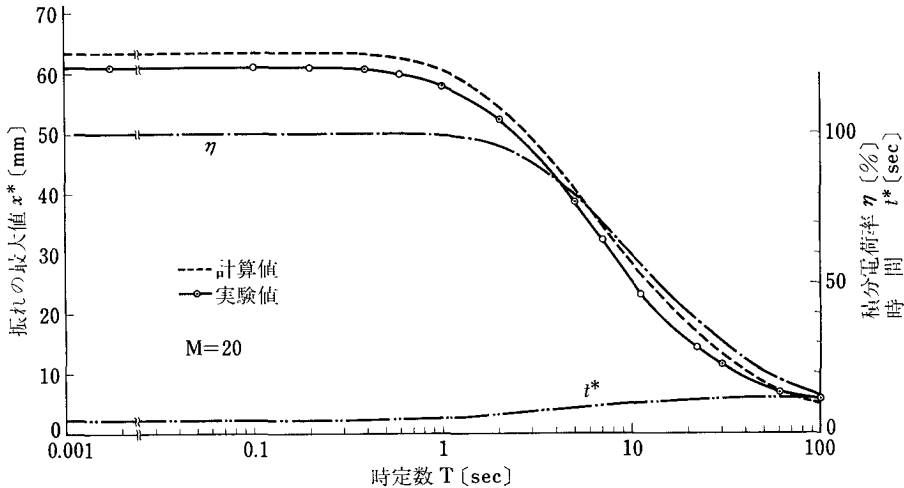


図 3 時定数に対する検流計の振れ

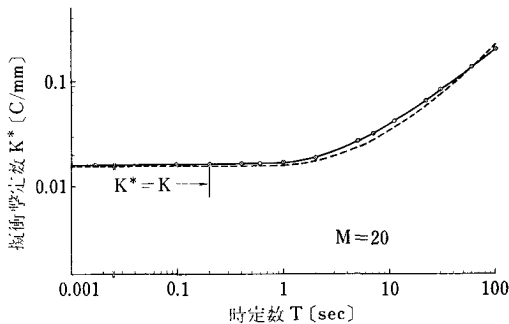


図 4 時定数に対する擬衝撃定数

に η , K^* が求められる。図 3 は横軸に時定数 T をとったときの振れの最大値 x^* , その時の時間 t^* および積分電荷率 η を図示したものである。また図 4 は $T-K^*$ 曲線を示す。

図 3 で振れの最大値 x^* の実験値と計算値との相対誤差は時定数 T に対して x^* の値が一定値をとる範囲では 4.1 % である。この誤差の主な原因として考えられるのは検流計の運動方程式として考えた (3-3) 式は検流計のコイルのインダクタンスによる影響を無視した方程式であることと検流計の各定数を推定するための測定における誤差が考えられる。しかし振れ x^* が時定数 T に対して一定値をとる範囲は大体同じであることを考えれば本論文の目的から言って先のパラメータ推定法は一応良好な結果が得られる。

積分特性を見ると時間 t^* までに検流計で積分された電荷が全電荷に等しい ($\eta = 100\%$) ときの時定数 T の範囲は 0.2 秒である。これに対して擬衝撃定数 K^* が衝

撃定数 K と等しい範囲も図 4 から 0.2 秒であることがわかる。すなわち放電回路の電流は検流計の最大振れ時間 t^* までに通過し終わっていれば電流積分は完全に行なわれ、この時 $K^* = K$ である。

また電荷測定における測定条件は放電回路の時定数 T が

$$T = CR \leq 0.2 \text{ [秒]}$$

の条件を満足すればよいことがわかった。

時間 t^* は時定数 T の変化に対して $T_n = 21.2$ 秒の場合

$$4.5 \leq t^* \leq 13$$

の範囲をとる。

なお実験における最大振れ x^* の読み取り誤差を考えて $\pm 1 \text{ mm}$ の許容範囲をもたせれば時定数 T の範囲は 0.5 秒まで拡大できる。このとき振れの相対誤差は $\pm 1.7\%$ 以下であるから特に精度を要求しない場合には測定条件として

$$T \leq 0.5 \text{ [秒]}$$

を用いてもよい。

6. あとがき

本論文では超万能分流器の倍率 $M=20$ の測定に対して考察を行なったが他の倍率の場合でも同様な結果が得られる。また $T_n = 17.8, 18.4, 19.6$ の検流計で実験したところ電荷測定における測定条件としての放電回路の時定数 T の範囲は考察で述べた条件と一致した。

擬衝撃定数 K^* が $K^* \approx K$ の範囲は適当な装置を加えることによって高抵抗測定に利用できる。

ここでは測定に対する誤差の伝搬や測定における機械的振動について考察を行なっていないがつぎの機会に言及したい。

本論文を終るにあたり、本学三浦隆俊教授ならびに、康原章弘教授に指導をいただいたことに謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 山内二郎監修「新版電気計測便覧」286/287 オ

ーム社 S41年

- 2) 電気学会「電気磁気測定Ⅱ」252/274 S36年
- 3) ポントリャーギン (木村俊房校閲, 千葉克裕訳)
「常微分方程式」25/144 共立出版 S38年
- 4) 佐武一郎「行列と行列式」35/38 裳華房 S40年
- 5) Ernest Frank “Electrical Measurement Analysis” 93/95 McGraw-Hill, New York (1959)